

中国科学技术大学
大学生数学夏令营竞赛试题样题
(数学分析、实分析与复分析)

注意: 所有题目的解答要有详细过程, 用到的定理需要注明.

数学分析

1. (15分) 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上可微, 在 $(0,0)$ 处连续, 且

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

求证: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

2. (15分) 证明: 从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 且将任何开集映为开集的连续函数一定是单调的.

3. (15分) 设 $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$, f 是 $[-1, 1]$ 上如下定义的函数:

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & \text{if } x \neq 0; \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

证明:

(i) 当且仅当 $a > 2 + b$ 时 $f''(0)$ 存在;

(ii) 当且仅当 $a \geq 2 + 2b$ 时 f'' 有界.

4. (15分) 证明: 对任何 $x \in (0, \pi/2)$,

$$1 + \frac{x^2}{3} \leq \frac{x^2}{\sin^2 x} \leq 1 + \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)x^2.$$

5. (15分) 设 f 是从区间 $[0, 1]$ 映到 $[0, 1]$ 的函数, 其图像 $\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$ 是单位正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的闭子集. 证明 f 是连续函数.

复分析

1. (15分) 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}.$$

2. (15分) 设 f 是单位圆盘 $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上的全纯函数, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是其幂级数展开. 证明: $f(D)$ 的面积等于 $\pi \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2$.

3. (10分) 设整函数 f 满足 $f(z) = O(|z|^\pi)$ as $z \rightarrow \infty$. 证明: f 是次数不超过 3 的多项式.

4. (10分) 设 f 是从右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$ 到单位圆盘的全纯映射. 证明

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{2\operatorname{Re} z}$$

对右半平面中任一点 z 成立.

实分析

1. (15分) 设 $m(E) < +\infty$. 证明: 若函数列 $\{f_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 分别依测度收敛于 f 和 g , 则 $\{f_k g_k\}$ 依测度收敛于 fg .

2. (15分) 证明或否定: 函数 f 几乎处处连续当且仅当它几乎处处等于一个连续函数.

3. (10分) 是否存在正测集 $E \subset [0, 1]$, 使得对于 $[0, 1]$ 中任一开区间 I , 有 $m(E \cap I) = m(I)/2$.

4. (10分) 设 f 是 $[0, 1]$ 上连续函数, $f(0) = 0$, $f'(0)$ 存在. 证明: 函数 $g(x) = f(x)/x^{3/2}$ 在 $[0, 1]$ 上可积.